高校1年生から始める高校物理　熱力学編

・目次

〈目標1〉
- 固体、液体、気体
- 気体の性質
- 絶対温度 & 状態方程式

〈目標2〉
- × たすきがけによる因数分解
- × 和の記号Σ & 平均
- 熱量 & 熱平衡
- 気体分子運動論
- 平均自由行程

〈目標3〉
- 理想気体の内部エネルギー
- 熱力学第1法則
- 断熱変化
- × 指数関数
- × 対数関数
- × 対数関数の微積分&ネイピア数

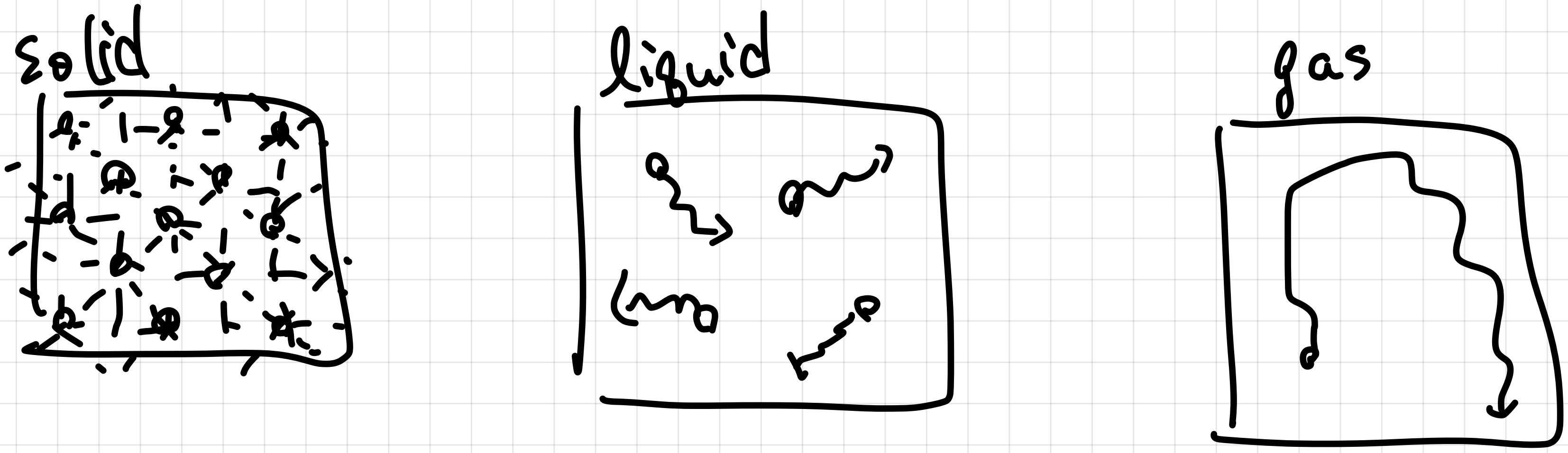
〈目標1〉

$\boxed{\text{理想気体の状態方程式}}$

固体、液体、気体

固体 と 液体 と 気体 の ちがいは?
solid liquid gas

この差を説明するのは
非常に難しい
(量子力学)
メインに扱うのは気体



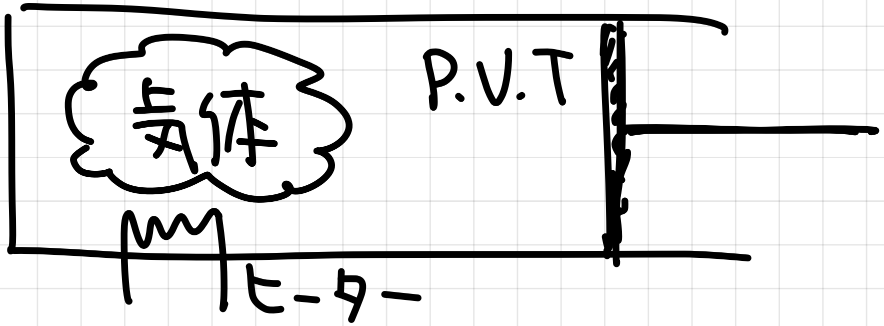
圧縮性	×	×	○
流動性	×	○	○
表面	○	○	× △

気体の性質

気体は種類によらず同じ性質がある

↑

実験から分かったこと。



P : 圧力　pressure

V : 体積　volume

T : 温度　temperature

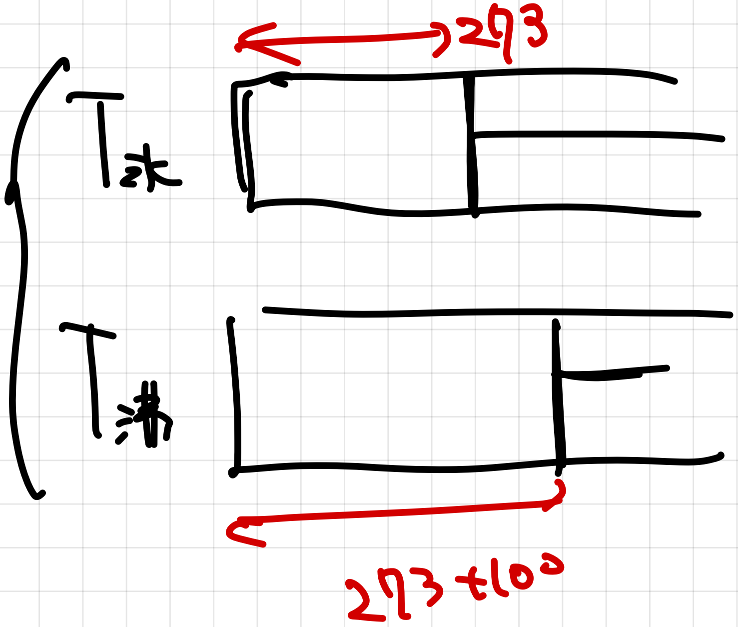
を操作して実験する。

① 「ボイルの法則」　温度一定　$PV = \text{const.}$

② 「ゲイリュサックの法則」　圧力一定　$\dfrac{V(T_{沸}) - V(T_{氷})}{V(T_{氷})} = \dfrac{100}{273}$

$T_{沸}$: 水↔水蒸気の温度

$T_{氷}$: 氷↔水 の 温度



③ 分子数と体積

1atm & 0℃ のもとで、分子数 6.02×10^{23} 個 → 22.4 L

‖

1.013×10^{5} Pa

‖

アボガドロ数

mol という単位を使う

1mol ~ 6×10^{23} 個

2mol ~ 12×10^{23} $=1.2\times10^{24}$ 個

3mol ~ 1.8×10^{24} 個

①,②,③は近似的に成立

①.②.③が全て厳密に成立するのは、

「理想気体」　ideal gas

└→ ・気体分子自体の体積ゼロ

・分子間力ゼロ

影響

引力：ファンデルワールス力

斥力

分子間力も気体の体積も
気体の種類によって異なるが、

日常的なスケールでは現実の気体は
理想気体で近似できる

高密度、極低温だと
話がかわってくる。

絶対温度 & 状態方程式

熱力学では 絶対温度を使うのが便利

絶対温度は 0 以上

ふだん使っているのは「セルシウス温度」

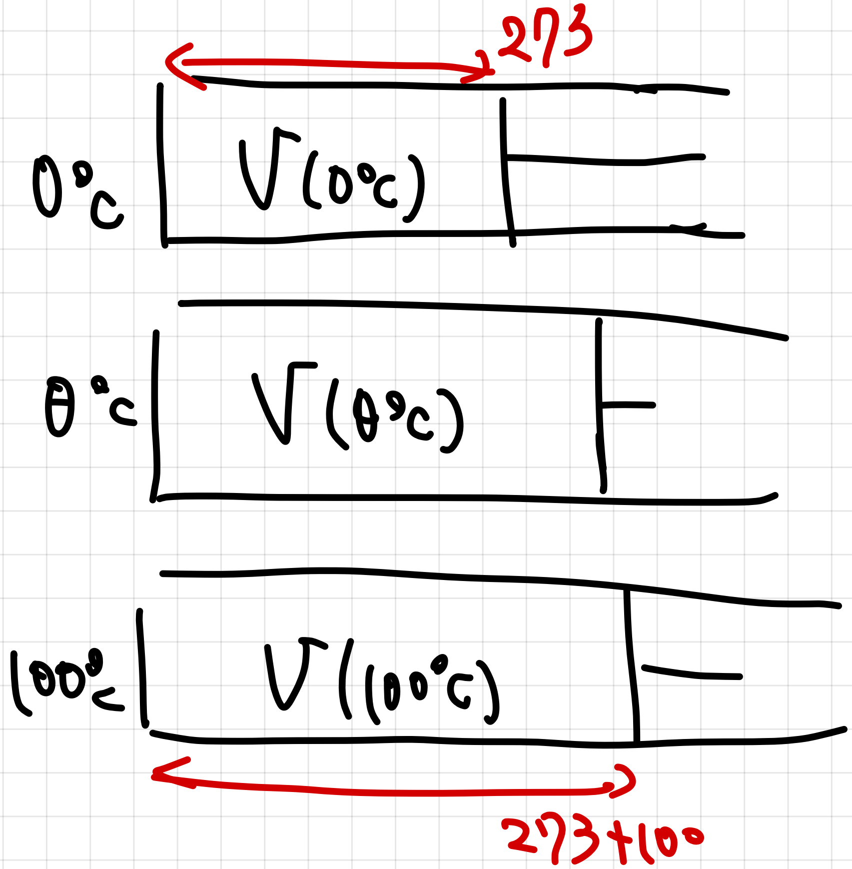
1atm のもとで　水 ⟷ 氷　0℃ → マイナスもある。

水 ⟷ 水蒸気　100℃　この間を等分。

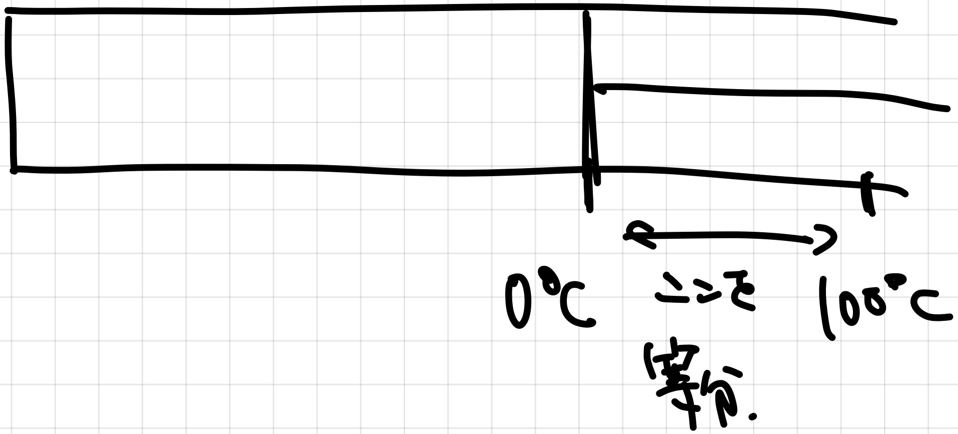
⇓

何を除って等分となるのか

まず 0°C と 100°C を決める.



1 atm の下で



$$\theta\ {}^\circ\mathrm{C} : 100\ {}^\circ\mathrm{C} = V(\theta\ {}^\circ\mathrm{C}) - V(0\ {}^\circ\mathrm{C}) : V(100\ {}^\circ\mathrm{C}) - V(0\ {}^\circ\mathrm{C})$$

$$\theta = \frac{100 \times (V(\theta) - V(0))}{V(100) - V(0)}$$

ゲイリュサックの法則

$$\frac{V(100) - V(0)}{V(0)} = \frac{100}{273} \quad \& \quad \theta = \frac{100\left(V(\theta) - V(0)\right)}{V(100) - V(0)}$$

かけ算

$$\frac{\cancel{V(100) - V(0)}}{V(0)} \times \frac{\cancel{100}\left(V(\theta) - V(0)\right)}{\cancel{V(100) - V(0)}} = \frac{\cancel{100}}{273}\theta$$

$$V(\theta) - V(0) = V(0) \times \frac{\theta}{273} \rightarrow V(\theta) = V(0)\left(1 + \frac{\theta}{273}\right)$$

シャルルの法則

$$V(\theta) = \frac{V(0)}{273}\underbrace{(273+\theta)}$$

ここを絶対温度 T $\underset{\text{ケルビン}}{\underbrace{K}}$ とすると.

$$V(T) = \frac{V(273)}{273}\cdot T$$

$$\frac{V(T)}{T} = \frac{V(273)}{273} = \text{const.}$$ ⇐ こっちをシャルルの法則として使うのが自然

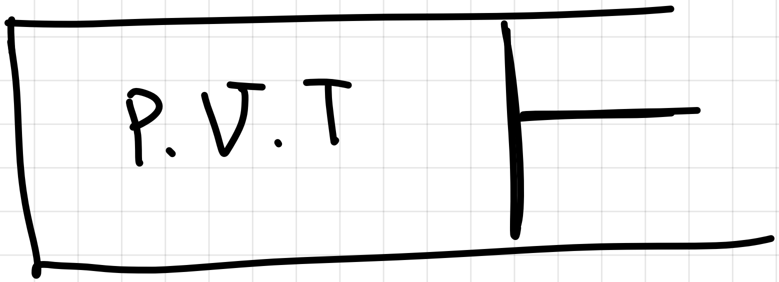
理想気体の体積が一定圧力下で絶対温度に比例

$$T_K = 273 + \theta_{°C}$$

θが +1 °C すると

T も +1 °C 「きざみ幅」が同じ

$$P(T) \times V(T) = 1\,\mathrm{atm} \times \frac{V(273)}{273}\, T$$



$$\Rightarrow \frac{P \cdot V}{T} = \mathrm{Const.}$$

V は mol 数に比例するので

mol = n

$$\frac{PV}{T} = n \times (\text{定数})$$

* P と T は n に依存しない。

$PV = nRT$ ： 理想気体の状態方程式

R = 気体定数

＊ 状態方程式は「平衡状態」を扱う

$$R = \frac{P \cdot V}{nT} = \frac{1.013 \times 10^{5}\,\mathrm{Pa} \times \overbrace{22.4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^{3}}^{\mathrm{L}}}{1\,\mathrm{mol} \times 273\,\mathrm{K}}$$

$$= 8.31\ \mathrm{J/mol \cdot K}$$

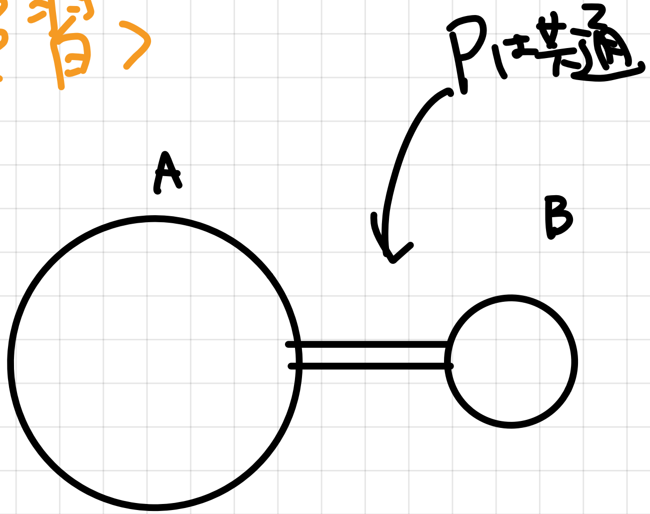
状態方程式 と

1atm
0°C ⇒ 22.4L
1mol

を覚えておけば 大学受験的には O.K.

〈演習〉

1.



$P_1、V_A、T_1$　　　P_1, V_B, T_1

$\Downarrow$

Aの温度だけ $T_1 \to T_2$

(1) 最初の n_A, n_B は?

(2) $T_1 \to T_2$ にしたあとの n_A', n_B' は?

(1)

$$P_1 \cdot V_A = n_A R T_1$$

$$n_A = \frac{P_1 V_A}{R T_1}$$

$$n_B = \frac{P_1 V_B}{R T_1}$$

(2)

$$P_2 \cdot V_A = n_A' R T_2$$

$$P_2 \cdot V_B = n_B' R T_1$$

$$\frac{n_A'}{n_B'} = \frac{V_A T_1}{V_B T_2}$$

$$n_A' + n_B' = n_A + n_B$$

$$= \frac{P_1 (V_A + V_B)}{RT_1}$$

$$n_B' = \frac{P_1 (V_A + V_B)}{RT_1} - n_A'$$

$$\frac{n_A'}{\frac{P_1 (V_A + V_B)}{RT_1} - n_A'} = \frac{V_A T_1}{V_B T_2}$$

$$n_A' = \frac{V_A \cancel{T_1}}{V_B T_2} \cdot \frac{P_1 (V_A + V_B)}{R \cancel{T_1}} - \frac{V_A T_1}{V_B T_2} n_A'$$

$$\frac{V_B T_2 + V_A T_1}{\cancel{V_B T_2}} n_A' = \frac{V_A \, P_1 (V_A + V_B)}{\cancel{V_B T_2} \cdot R}$$

$$n_A' = \frac{P_1 V_A (V_A + V_B)}{R (V_B T_2 + V_A T_1)}$$

単位チェック!!

$$n_B' = \frac{V_B T_2}{\cancel{V_A} T_1} \frac{P_1 \cdot \cancel{V_A} (V_A + V_B)}{R (V_B T_2 + V_A T_1)}$$

$$= \frac{P_1 V_B (V_A + V_B)}{R (V_B T_2 + V_A T_1)} \frac{T_2}{T_1}$$

〈目標 2〉

気体分子運動論
&
エネルギー等分配則

たすきがけによる因数分解

(※ 中3 or 高1 で習う。)

$$6a^2 + ab - b^2 = (2a+b)(3a-b)$$

1×5　　　-1×1

2×3　　　$1 \times (-1)$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & \rightarrow & 3 \\ & \times & & & \\ 3 & & -1 & \rightarrow & -2 \\ \hline & & & & +1 \end{array}$$

積

$$6x^2 - 13xy + 6y^2 = (2x-3y)(3x-2y)$$

2	╳	-3	$\to -9$
3		-2	$\to -4$
			-13

〈演習〉

1. $2x^2+7x+6$
2. $12x^2-16xy-3y^2$
3. $8a^3-36a^2+54a-27$
4. $x^2-2xy+y^2-x+y-2$ （難）

1. $2x^2+7x+6 = (x+3)(2x+1)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 3 & \rightarrow & 6 \\ 2 & \times & 1 & \rightarrow & 1 \\ \hline & & & & 7 \end{array}$$

2. $12x^2-16xy-3y^2 = (6x+y)(2x-3)$

$$\begin{array}{ccccc} 6 & & 1 & \rightarrow & 2 \\ 2 & \times & -3 & \rightarrow & -18 \\ \hline & & & & -16 \end{array}$$

3. $8a^3-36a^2+54a-27$

$= (2a)^3+3\cdot(2a)^2\cdot(-3)+3(2a)\cdot(-3)^2+(-3)^3$

$= (2a-3)^3$

4. $x^2-2xy+y^2-x+y-2$

次数の低いものでくくる　(今の場合は x も y も 2次)

$$= x^2+(-2y-1)x+\underbrace{y^2+y-2}$$

因数分解

$$= x^2-(2y+1)x+(y+2)(y-1)$$

$$\begin{array}{ccccc}
1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -(y+2) & \rightarrow & -(y+2) \\
1 & & -(y-1) & \rightarrow & -(y-1) \\
\hline
 & & & & -(2y+1)
\end{array}$$

$$= (x-y-2)(x-y+1)$$

和の記号Σ & 平均

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k$$

kのゴール → n

和をします → $\sum$ a_k

kのスタート → $k=1$

$\underbrace{a_k}$ 整数 k の数列 (関数)

〈演習〉

Σを使って書き直せ

1. $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$

2. $1+2+4+\cdots+2^{n+1}$

3. $(2\times 3)+(4\times 5)+(6\times 7)+(8\times 9)+\cdots+\{2n\times(2n+1)\}$

1. $1=2\cdot 0+1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$

3. $\sum_{k=1}^{n} 2k(2k+1)$

2. $1=2^0. \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} 2^k$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$

$$= (2\cdot 1+1)+(2\cdot 2+1)+(2\cdot 3+1)+\cdots+(2\cdot n+1)$$

和の線形性

$$= 2(1+2+3+\cdots\cdots+n)+(1+1+\cdots\cdots+1)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

一般に

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{k=\alpha}^{\beta}(A a_k + B b_k)\\ &= A\sum_{k=\alpha}^{\beta} a_k + B\sum_{k=\alpha}^{\beta} b_k\end{aligned}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

$$+)\ \sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$ ：公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

テクニック

$$(k+1)^3 - k^3$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3$$

$$= 3k^2 + 3k + 1$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \{(k+1)^3 - k^3\}}_{左} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1)}_{右}$$

$$(左) = (\cancel{2^3} - 1^3) + (\cancel{3^3} - \cancel{2^3}) + (4^3 - \cancel{3^3}) + \cancel{\cdots} + \{\cancel{n^3} - \cancel{(n-1)^3}\} + \{(n+1)^3 - \cancel{n^3}\}$$

$$= (n+1)^3 - 1^3$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n$$

$$(右) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n = n^3 + 3n^2 + 3n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$6\sum_{k=1}^{n} k^2 = n\left(2n^2 + 3n + 1\right)$$

$$= n(n+1)(2n+1)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

公式

〈演習〉

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = ?$$

$$(k+1)^4 - k^4$$

$$(k+1)^4 = {}_4C_0 k^4 + {}_4C_1 k^3 + {}_4C_2 k^2 + {}_4C_1 k + {}_4C_0$$

$$= k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

$$-k^4$$

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \{(k+1)^4 - k^4\}$$

$$= (\cancel{2^4} - 1^4) + (\cancel{3^4} - \cancel{2^4}) + (\cancel{4^4} - \cancel{3^4}) + \cdots$$

$$+ \{\cancel{n^4} - \cancel{(n-1)^4}\} + \{(n+1)^4 - \cancel{n^4}\}$$

$$= (n+1)^4 - 1 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} \cdot 1$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n .$$

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n$$

$$= n\{ n^3 + 4n^2 + 6n + 4 - (n+1)(2n+1) - 2(n+1) - 1 \}$$

$$= n\{ n^3 + 4n^2 + 6n + \cancel{4} - 2n^2 - 3n - \cancel{1} - 2n - \cancel{2} - \cancel{1} \}$$

$$= n\{ n^3 + 2n^2 + n \} = n^2(n+1)^2$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2}$$

公式

40人のクラス

国語 a_1, a_2, ……, a_{40}

数学 b_1, b_2, ……, b_{40}

国語の平均 $\Rightarrow$ $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{40}}{40} = \dfrac{1}{40}\sum_{k=1}^{40} a_k$

数学 〃 $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{40}\sum_{k=1}^{40} b_{40}$

nコのデータ a_i $(i=1\sim n)$ の平均値 $\bar{a}$ は

$$\boxed{\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

で表される

〈演習〉

n 人 クラスのテストの成績

国語	a_i	$(i=1\sim n)$
数学	b_i	$(i=1\sim n)$
英語	c_i	$(i=1\sim n)$
理科	d_i	$(i=1\sim n)$
社会	e_i	$(i=1\sim n)$

1. iさんのテストの平均値 f_i は?

2. 各科目の平均値は? $\bar{a} \sim \bar{e}$

3. $\bar{a} \sim \bar{e}$ の平均値と f_i の平均値が一致することを示せ.

1. $$f_i = \frac{1}{5}(a_i + b_i + c_i + d_i + e_i)$$

2. $$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$ 以下同様

3. $$\bar{f} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i + \cdots + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i\right)$$

$$= \frac{1}{5}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d} + \bar{e})$$

熱力 & 熱平衡

水について考える

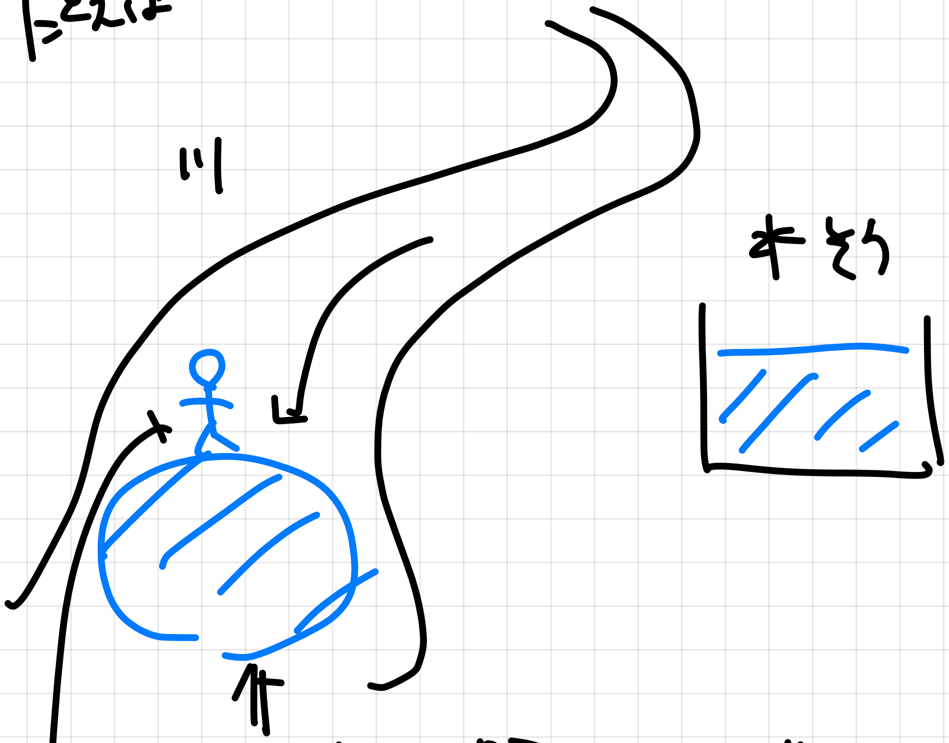
一般に

氷より 水の方が 熱い
水より 水蒸気 〃

この違いは「熱運動」による

ただの運動とはちがう

たとえば



こっちの方が運動しているけど
だからといって熱くなるわけではない

同じ速さで移動する人になって
「ランダム」な 分子の運動を見る必要
がある。

熱運動の激しさ ⇒ 温度.

⇑

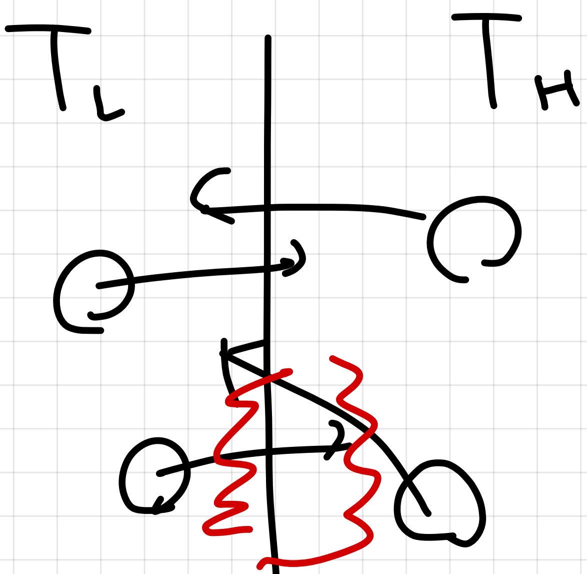
運動エネルギーの平均値で評価.

↑

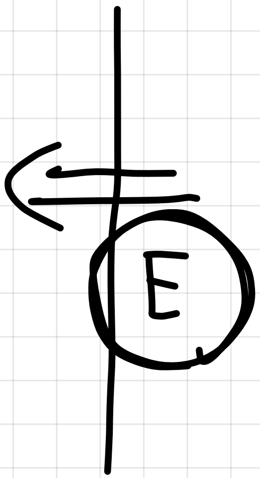
高校物理では熱平衡状態のみを扱う.

$T_L < T < T_H$

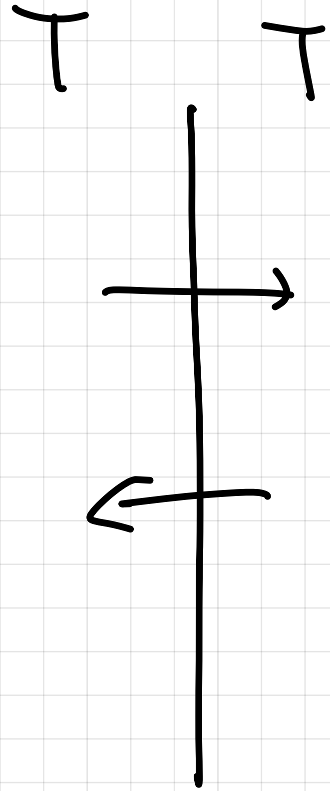
＊「熱力学第0法則」



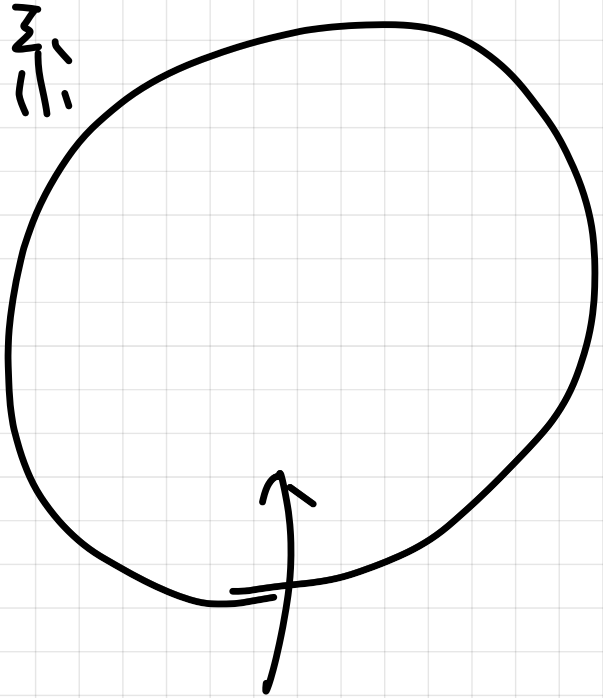
「衝突」を通じて
エネルギーを受け渡す



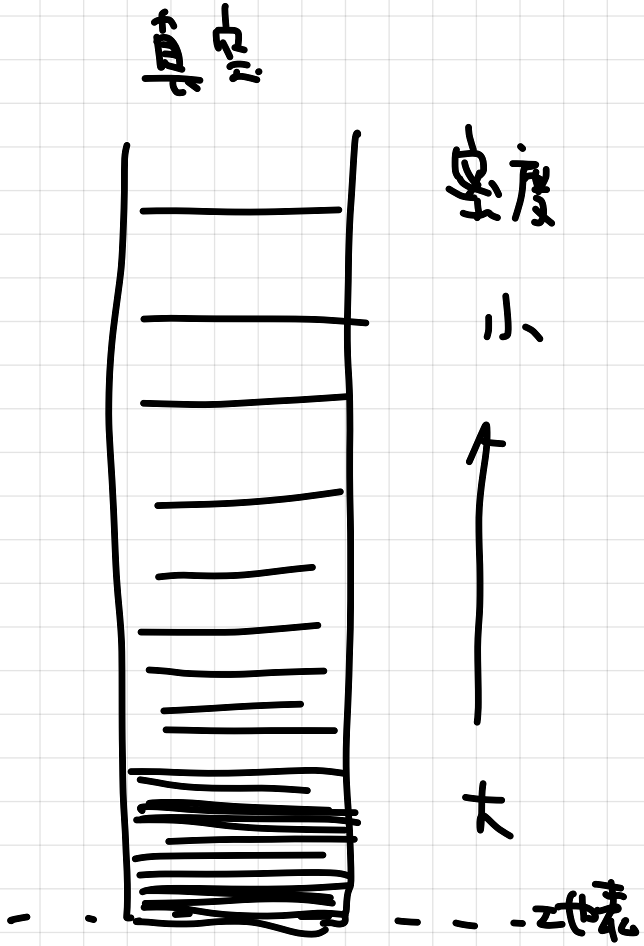
平均すると
T_H側から
T_L側へエネルギー
が移る.



平均するとエネルギーの
受けわたしがなくなる

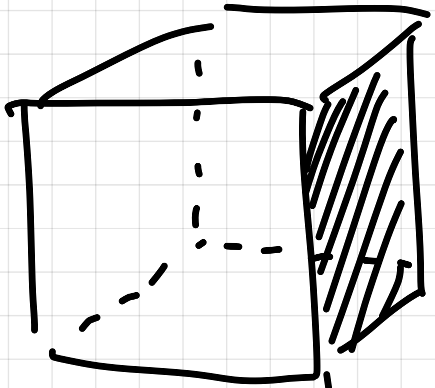


系全体で温度や
(気体)分子などの濃度が
均質で時間変化しない状態
⇒「熱平衡」



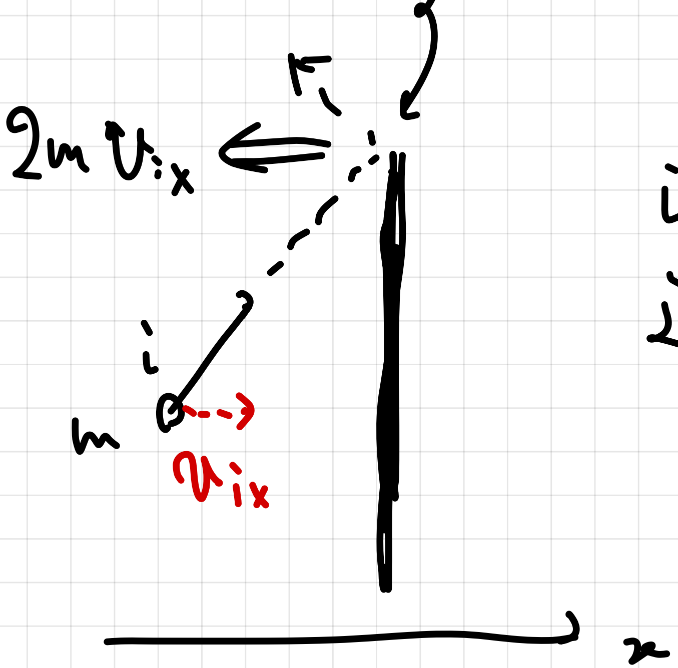
一様ではないけど これも
「平衡状態」

気体分子運動論



辺Lの立方体中に、
理想気体が
N分子ある

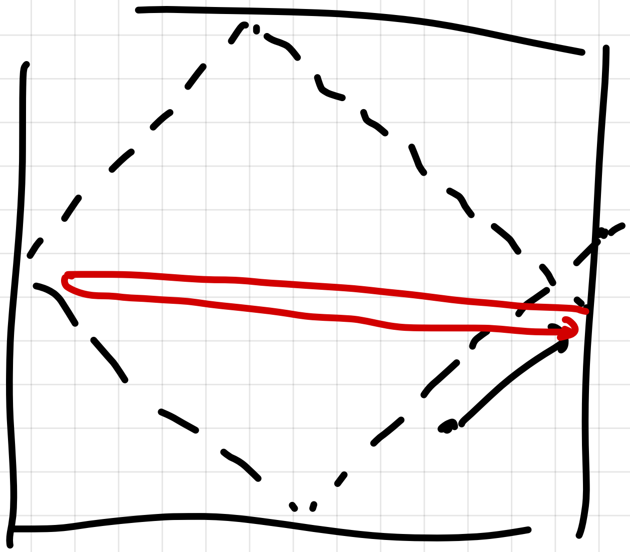
また、エネルギーは外に逃げない



iという分子のx方向の
速度 v_{ix} とする。

はね返るときに
エネルギーが逃げないので
弾性衝突

↓ 1回の衝突で
壁には、
$2mv_{ix}$ の力積を
受ける。



もう一度同じ壁に衝突するのに
かかる時間は $\Delta t = \dfrac{2L}{v_{ix}}$

十分長い時間 T の間に

$\dfrac{T}{\Delta t}$ 回衝突.

T の間に受ける力積は

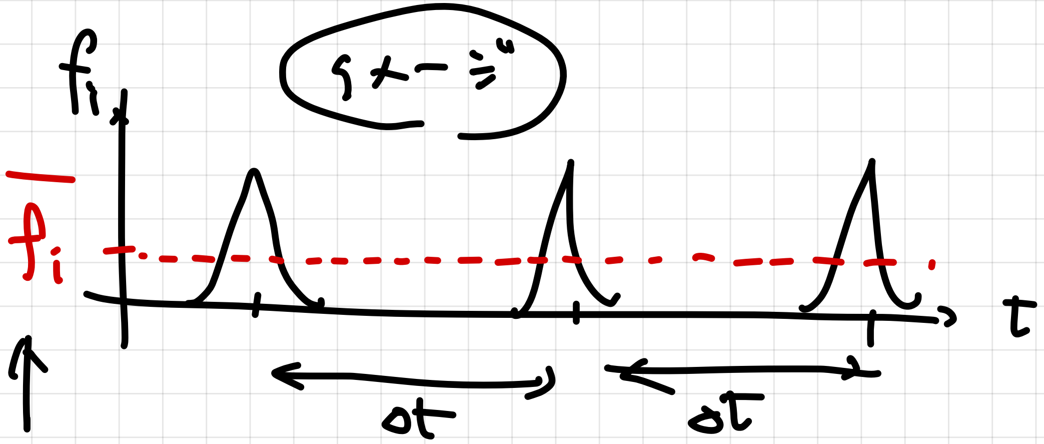
$$\frac{T}{\Delta t} \times 2mv_{ix}$$

時間平均(1秒あたり)に直すと.

$$\frac{1}{T} \times \frac{T}{\Delta t} \times 2mv_{ix}$$

$$= \frac{2mv_{ix}}{\Delta t} = \frac{mv_{ix}^2}{L}$$

分子 i が壁に与える力



時間平均

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T f_i(t)\,dt = \bar{f_i}$$

$$I_i = \int_0^T f_i(t)\,dt = \bar{f_i}\cdot T$$

$$\frac{I_i}{T} = \bar{f_i} = \frac{m v_{ix}^2}{L}$$

$$F = \sum_{i=1}^{N} \bar{f_i}$$

$$= \frac{m}{L}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_{ix}^2 \cdot N$$

$$= \frac{m}{L}\overline{v_x^2}\cdot N$$

熱運動はバラバラな方向を向いているので

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

$$= 3\overline{v_x^2} \rightarrow \overline{v_x^2} = \overline{v^2}/3$$

$$F = \frac{m}{3L}\overline{v^2}\cdot N$$

壁に加わる圧力は F を L^2 で割ればいい．

$$\frac{F}{L^2} = \underbrace{\frac{m}{3L^3}}_{\downarrow\, V}\,\overline{v^2}\cdot N = P$$

運動エネルギーは T に比例

$$PV = N\frac{m\overline{v^2}}{3} = nRT = N\underbrace{\frac{R}{N_A}}_{k_B}T$$

$n = \dfrac{N}{N_A}$ ： N_A ：アボガドロ定数

k_B ：ボルツマン定数．

「エネルギー等分配則」 1 自由度あたり $\dfrac{k_BT}{2}$

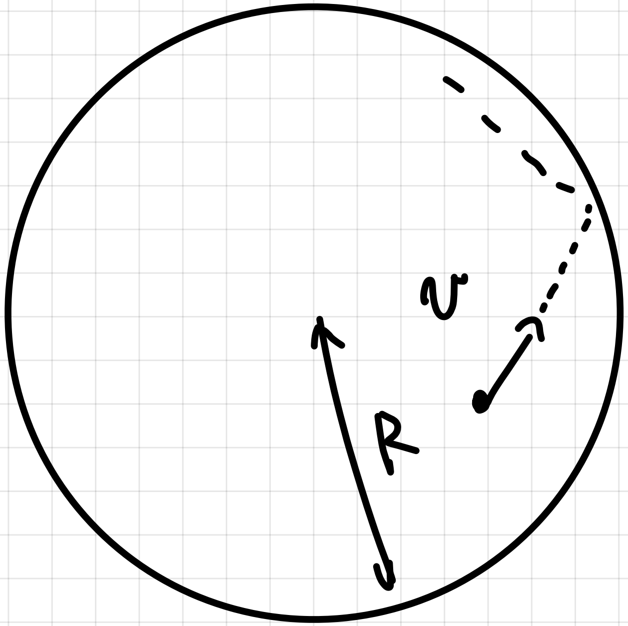
$$\frac{m\overline{v^2}}{3} = k_BT$$

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}k_BT$$

$$\frac{m\overline{v_x^2}}{2} + \frac{m\overline{v_y^2}}{2} + \frac{m\overline{v_z^2}}{2}$$

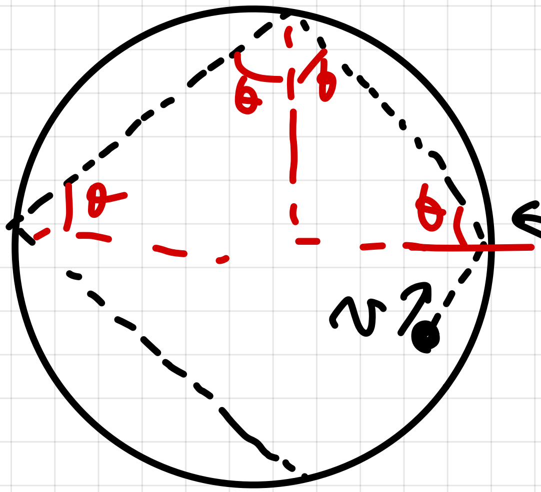
$$= \frac{k_BT}{2} + \frac{k_BT}{2} + \frac{k_BT}{2}$$

〈演習〉



半径Rの断熱球にN個の理想気体

⇒ 状態方程式を導け.



衝突で壁に

$2mv\cos\theta$

次の衝突までにかかる時間

$$\Delta t = \frac{2R\cos\theta}{v}$$

十分長い時間 Tの間に

$$\frac{T}{\Delta t} = T \times \frac{v}{2R\cos\theta} \text{ 回衝突}$$

Tの間に

$$T \times \frac{v}{\cancel{2}R\cancel{\cos}\theta} \times \cancel{2}mv\cancel{\cos\theta}$$

$$= T \times \frac{mv^2}{R}$$

Tで割って $\frac{mv^2}{R}$ が平均の力

$$F = \frac{m\overline{v^2}}{R} \cdot N$$

$$P = \frac{F}{4\pi R^2} = \frac{m\overline{v^2} \cdot N}{4\pi R^3}$$

$$= \frac{\frac{m\overline{v^2} \cdot N}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{m\overline{v^2} \cdot N}{3V}$$

$$PV = \frac{Nm\overline{v^2}}{3} = \frac{N}{3} \frac{m\overline{v^2}}{2} \cdot 2$$

$$= \frac{N}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} k_B T \cdot \cancel{2}$$

$$= N k_B T = nRT$$

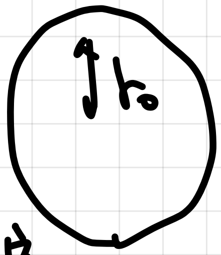
平均自由行程

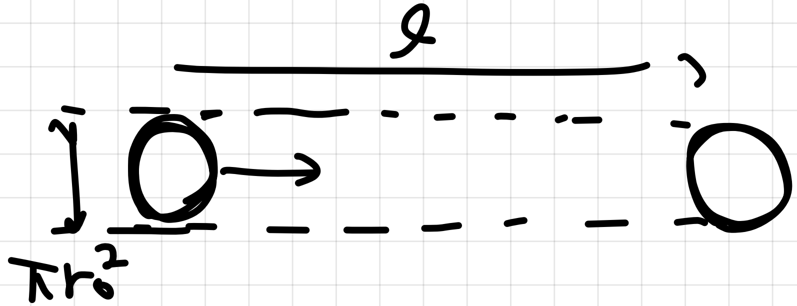
気体分子運動論では分子同士が衝突しないことが仮定されていた.

「分子のサイズ」を考慮してみる

→ 剛体球

半径 r_0 の球と仮定.





平均して l の距離進むと他の分子にあたる

l: 平均自由行程

分子数密度 ν 個/m^3 とする.

$$\frac{1}{\pi r_0^2 \cdot l} = \nu \Rightarrow l = \frac{1}{\pi r_0^2 \nu}$$

1秒で $\sqrt{\overline{v^2}}$ だけ進むとする.

* $\overline{v} = 0$

$\overline{v^2} > 0$

1秒で $\dfrac{\sqrt{\overline{v^2}}}{l}$ 回 ぶつかる.

← l 進むと1回ぶつかる.

$$N_{c\,回/秒} = \pi v r_0^2 \sqrt{\overline{v^2}}$$

〈演習〉

$$\left[\begin{array}{lll} N_2 & : & 28g/mol \\ 27^\circ c & , & 1\,atm \\ r_0 = & 3\times 10^{-10}\,m & \end{array}\right. \qquad R = 8.31\ J/mol\cdot K$$

$\sqrt{\overline{v^2}}$ と, l と, N_c は?

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}k_BT$$

$$\overline{v^2} = \frac{3k_BT}{m} = \frac{3R\cdot T}{mN_A} = \frac{3\times 8.31\times 300}{28\times 10^{-3}}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = 5\times 10^2\ m/s$$

$$l = \frac{1}{\pi r_0^2 \nu}$$

$$= \frac{V}{\pi r_0^2 N_A}$$

$$\frac{PV}{T} = \frac{1\times 22.4\times 10^{-3}}{273}$$

$$= \frac{1\times V}{300}$$

$$V = \frac{300}{273}\times 22.4\times 10^{-3}$$

$$l = \frac{\frac{300}{273} \times 22.4 \times 10^{-3}}{\pi \times 3^2 \times \cancel{10^{-20}} \times 6 \times 10^{\cancel{23}\,3}}$$

$$= 1.45 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

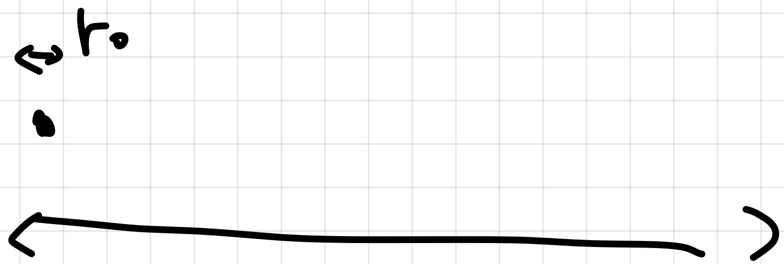
$$N_c = \frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{l} = \frac{5 \times 10^2}{1.45 \times 10^{-7}}$$

$$\sim 3.5 \times 10^9\ 回/\mathrm{s}$$

実際はかなり衝突している

$$\frac{l}{r_0} = \frac{1.45 \times 10^{-7}}{3 \times 10^{-10}}$$

$$\sim 500$$



$l \fallingdotseq 500 r_0$

分子と分子の間はかなり広い

〈 目標、3 〉

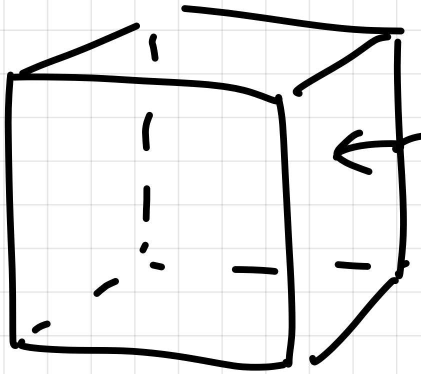
熱力学第1法則

$$Q^{in} = W^{out} + \Delta U$$

&

定積・定圧変化

理想気体の内部エネルギー



気体分子を閉じこめる

⇑

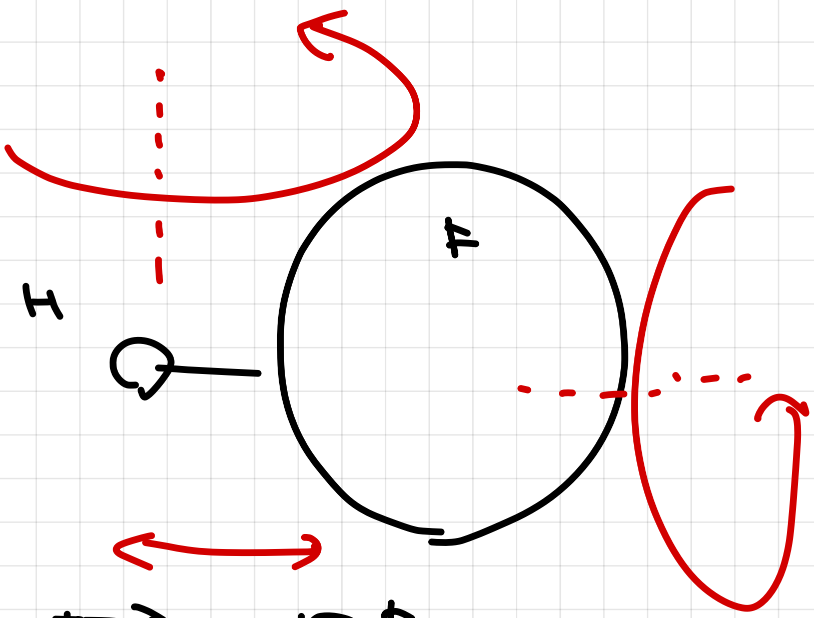
この中の気体が持っているエネルギーは、

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m|\vec{v}_i|^2}_{\text{①分子の並進運動の運動エネルギー}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^{\text{内}}}_{\text{②分子の内部運動の運動エネルギー}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{i>j\\ i=1}}^{N} u(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)}_{\text{③分子同士が及ぼし合う力による位置エネルギー}}$$

① $= \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m |\vec{v_i}|^2 \right) N$

$= N \frac{1}{2} m \overline{v^2} = N \cdot \frac{3}{2} k_B T$

② HF



振動・回転の自由度

一般に自由度1つあたり

$\frac{k_B T}{2}$ のエネルギー

⇓

② $= N \frac{f}{2} k_B T$

f: 自由度

高校の物理では

$f = 0$ … fがあたえられている.

単原子分子

正確なことは大学へ入ってから。

③

分子　　分子

分子間力　など

「理想気体」 $\Rightarrow$ $u(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = 0$

分子同士の相互作用は考えない。

理想気体 → 単原子分子 $U = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T$

→ そうじゃないとき $U = n \underline{\underline{C_v}} T$

内部エネルギー U は

n と T に比例

定積モル比熱

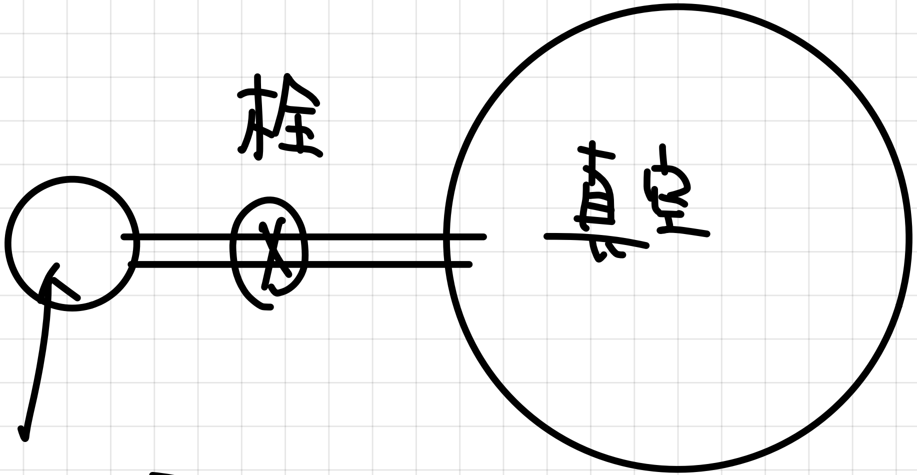
理想気体のときは

$\frac{3}{2} R = C_v$

少しあとで詳しく説明

※高校物理では C_v は定数

＜演習＞



P_0, V_A, T_0 　　　　　　　　V_B.

単原子分子理想気体

断熱材（外にエネルギーが逃げない）

栓を開けると　　p? T?

もともと.

$$P_0 \cdot V_A = nRT_0$$

$$U = \frac{3}{2}nRT_0 = \frac{3}{2}P_0V_A$$

開栓後　U 保存

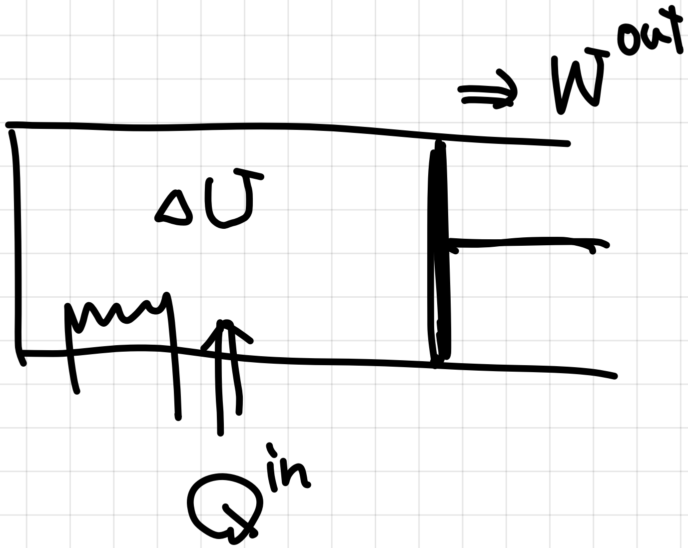
$$\frac{3}{2}nRT_0 = \frac{3}{2}nRT$$

$$T = T_0$$

$$p \cdot (V_A + V_B) = nRT_0 = P_0 \cdot V_A$$

$$p = \frac{V_A}{V_A + V_B} P_0$$

熱力学第1法則



$$\Rightarrow Q^{in} = \Delta U + W^{out}$$

「熱力学第1法則」

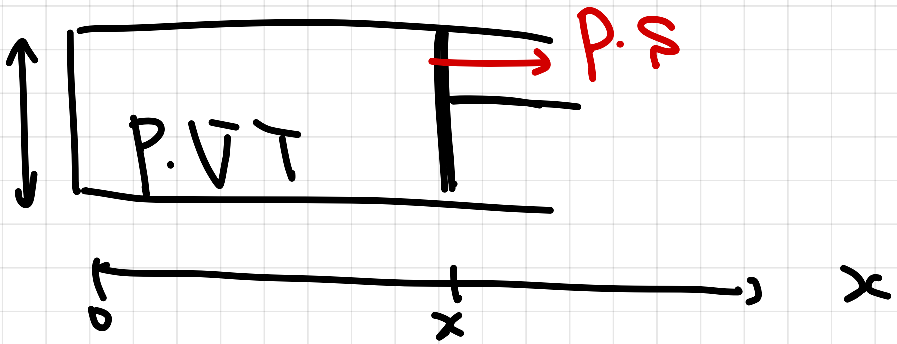
エネルギー保存則

外から系に Q^{in} だけ熱を加える

ΔU 内部エネルギー上昇

W^{out} 外へ仕事をする

W^{out} について.



S : 断面積　$\vec{dx}$ だけ動いたら

$$P\,S\,dx$$ だけの仕事

$$\int_{x_1}^{x_2} P \cdot S\,dx$$

$$V = Sx$$

$$dV = S\,dx$$

$$x : x_1 \to x_2$$

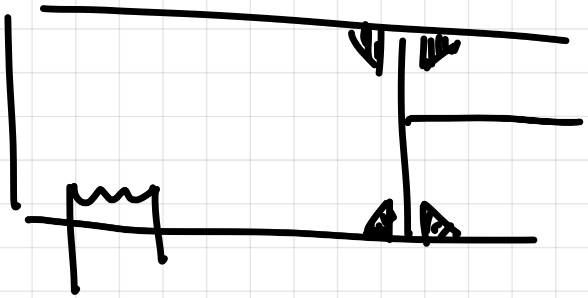
$$V : \underset{\overset{\shortparallel}{Sx_1}}{V_1} \to \underset{\overset{\shortparallel}{Sx_2}}{V_2}$$

$$\int_{V_1}^{V_2} \underset{\shortparallel}{P}\,dV = W^{out}$$

Pは V の関数

1. 定積変化

= 体積



$$Q^{in} = \underbrace{W^{out}}_{=0} + \Delta U$$

dVがゼロなので.

熱の出し入れがまるまる温度変化につながる.

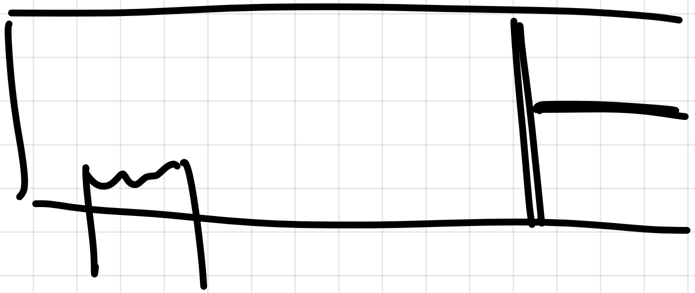
$$Q^{in} = \Delta U$$

$$= n C_v \Delta T$$

$$C_v = \frac{Q^{in}}{n \cdot \Delta T}$$

1molの気体を1K上げるのに必要な熱量：比熱.

2. 定圧変化



$$Q^{in} = W^{out} + \Delta U$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} p\,dV + nC_v\Delta T$$

$$= \underbrace{p}_{=\text{一定}}\Delta V + nC_v\Delta T$$

理想気体のとき

$$PV = nRT$$

P:一定

$$P\Delta V = nR\Delta T$$

$$Q^{in} = nR\Delta T + nC_v\Delta T$$

$$= n\underbrace{(R + C_v)}_{=C_p}\Delta T$$

定圧mol比熱

気体の温度を ΔT K 上げると言っても.

定積 → $n \cdot \underline{\underline{C_v}} \cdot \Delta T$

定圧 → $n \cdot C_p \cdot \Delta T = n\underline{\underline{(C_v+R)}}\Delta T$

必要な熱量が違う

定積

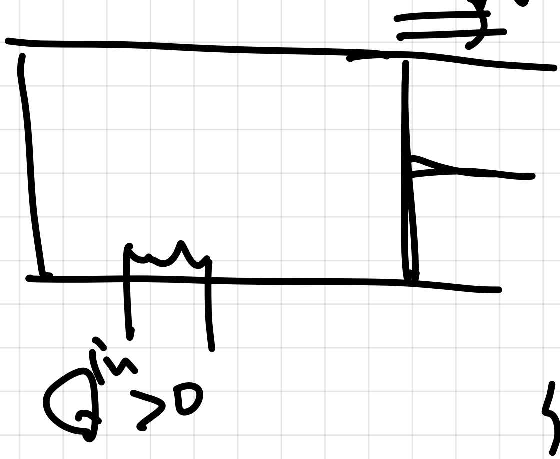
$W^{out}=0$ だから

Q^{in} が全て

ΔU になる.

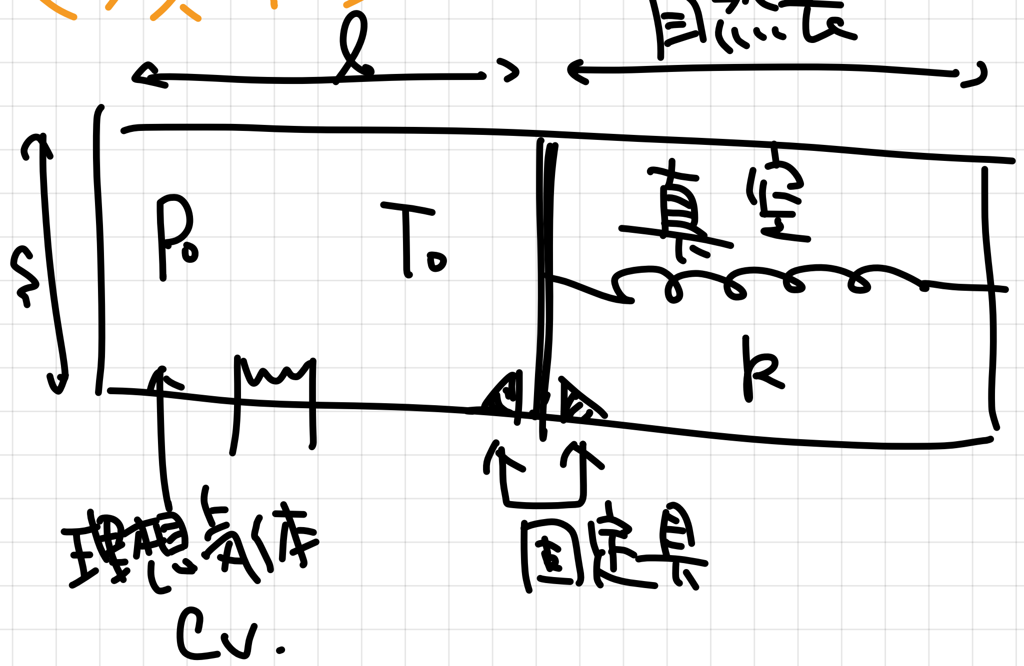
定圧

$W^{out}>0$



外に仕事をする分にも Q^{in} を使う.

＜演習＞



1. Qだけ熱を入れると $T_0 \to T_1$

   T_1は?

2. もとにもどして、固定具にはずす。

ゆっくり Qだけ熱を入れると $T_0 \to T_2$

   $l \to l_2$

   T_2は?

1.

$$Q = n C_v (T_1 - T_0)$$

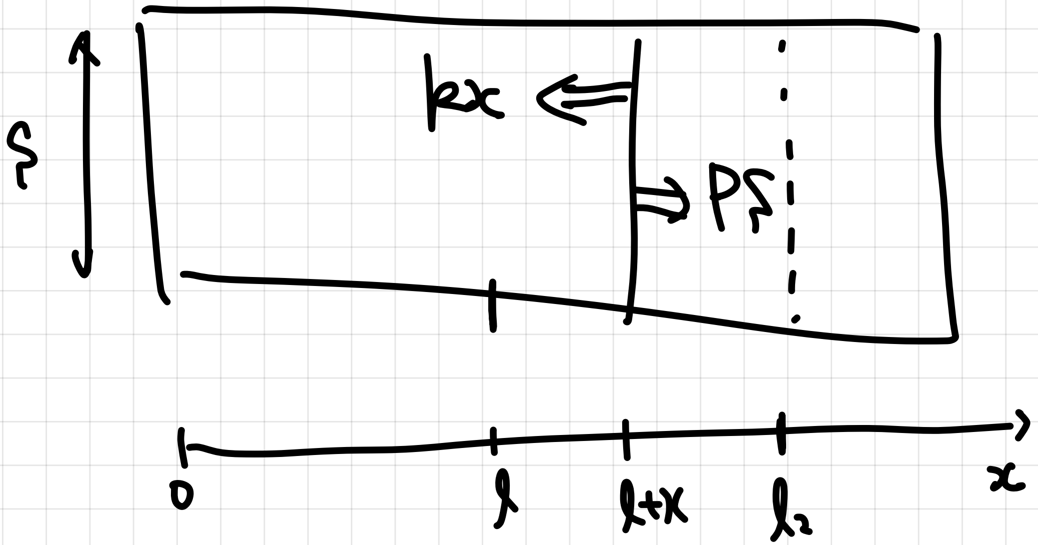
$$n = \frac{P_0 S l}{R T_0}$$

$$\frac{Q R T_0}{P_0 S l \, C_v} = T_1 - T_0$$

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{Q R T_0}{P_0 S l \, C_v} \right)$$

2.

$$Q = W^{out} + \Delta U$$



$$\int_{l}^{l_2} \underbrace{P(x)\cdot S}_{kx}\, dx = W^{out}$$

ゆっくりのとき.

$$= \frac{1}{2}k(l_2-l)^2$$

$$Q = \frac{1}{2}k(l_2-l)^2 + \underline{n}\, C_v (T_2 - T_0)$$

$$n = \frac{P_0 S l}{RT_0}$$

$$Q - \frac{1}{2}k(l_2-l)^2 = \frac{P_0 S l C_v}{RT_0}(T_2 - T_0)$$

$$\frac{\{2Q - k(l_2-l)^2\} RT_0}{2P_0 S l C_v} = T_2 - T_0$$

$$T_2 = T_0\left[1 + \frac{\{2Q - k(l_2-l)^2\} RT_0}{2P_0 S l C_v}\right]$$

〈目標4〉

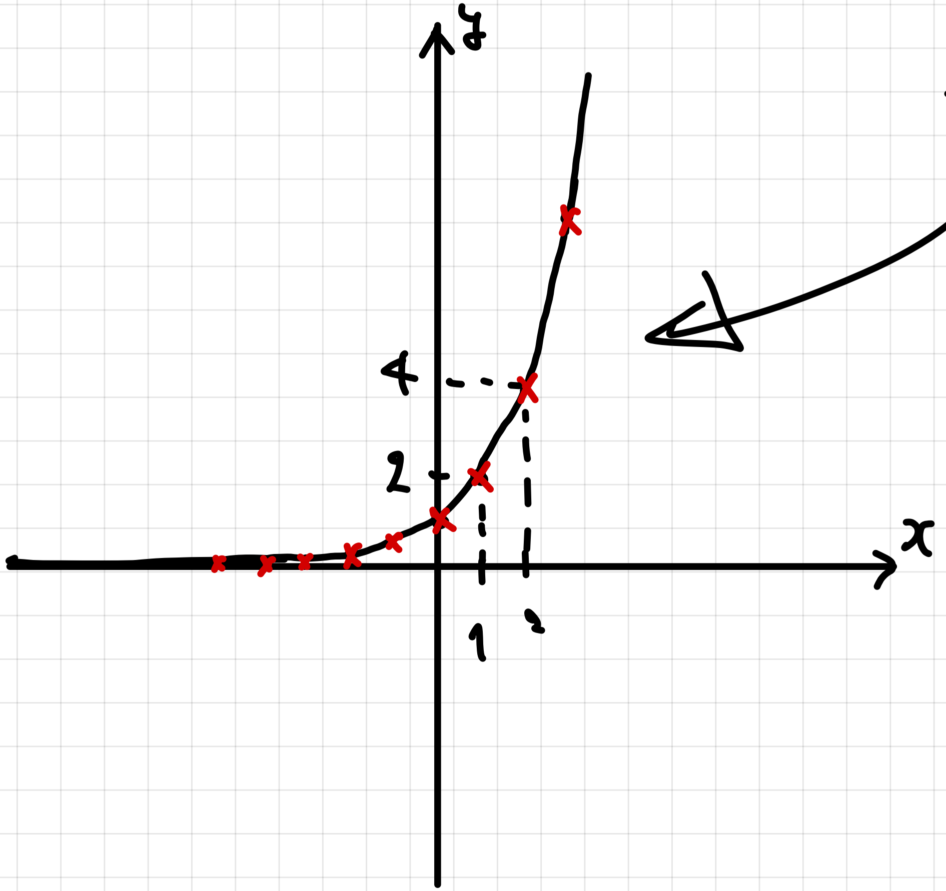
断熱変化 &

ポアソンの式

指数関数

$y=2^x$

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…



プロットしてつなげる

〈演習〉

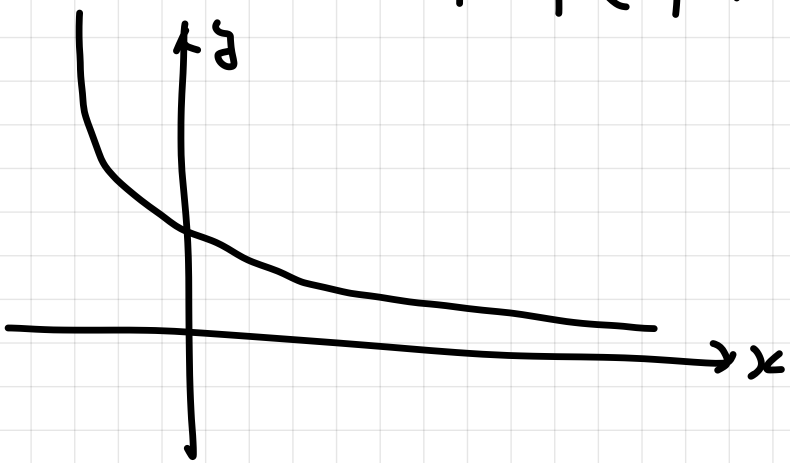
グラフをかけ

1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. $y = -3^x$

1.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



ちなみに．

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$$

$y = 2^x$ と $y = 2^{-x}$ は

y軸対称の関係

$\Rightarrow$ $f(x, y) = 0$

と

$f(-x, y) = 0$ は

y軸対称

$f(x, y) = 0$

と

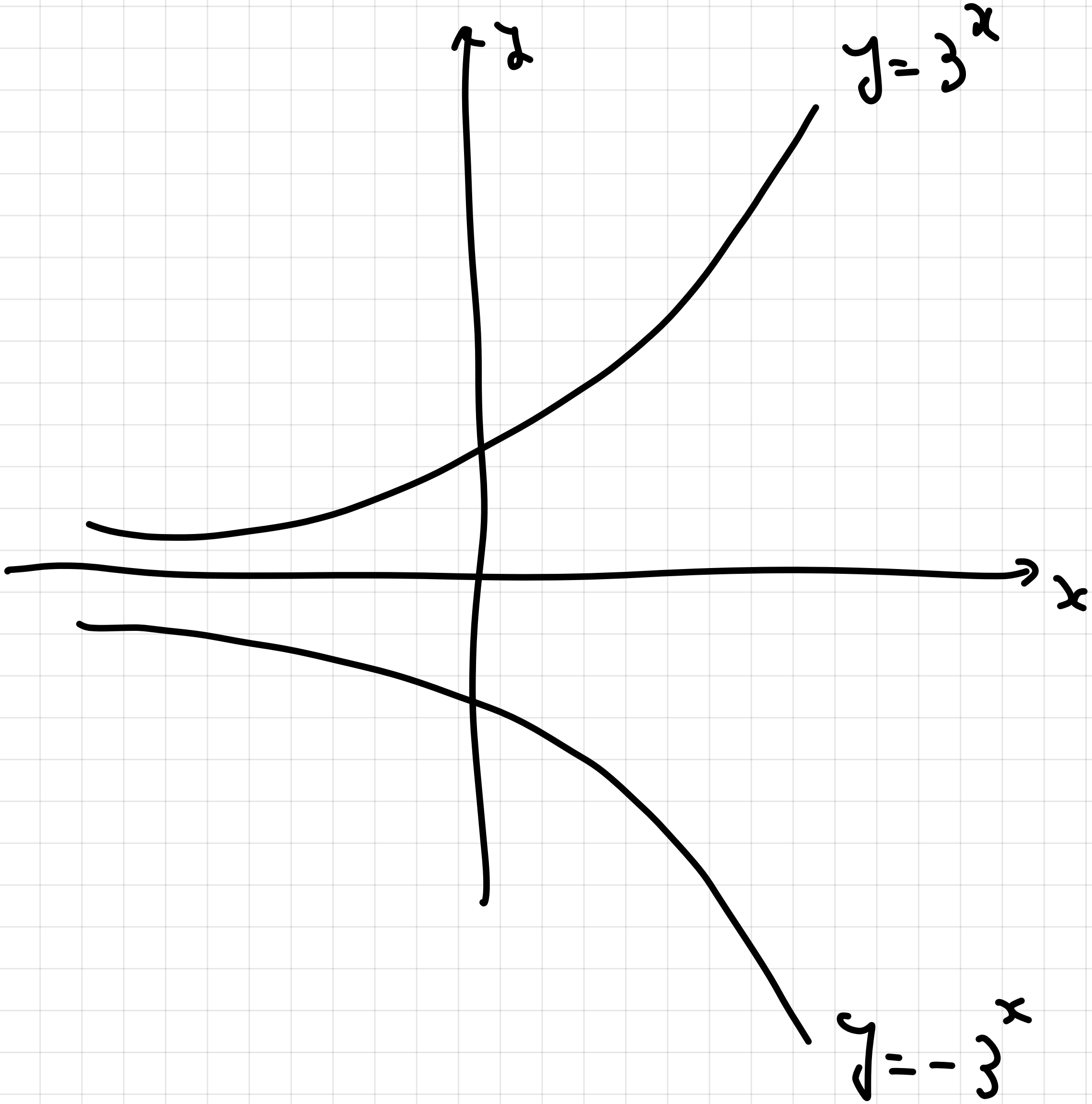
$f(x, -y) = 0$ は

x軸対称

2.

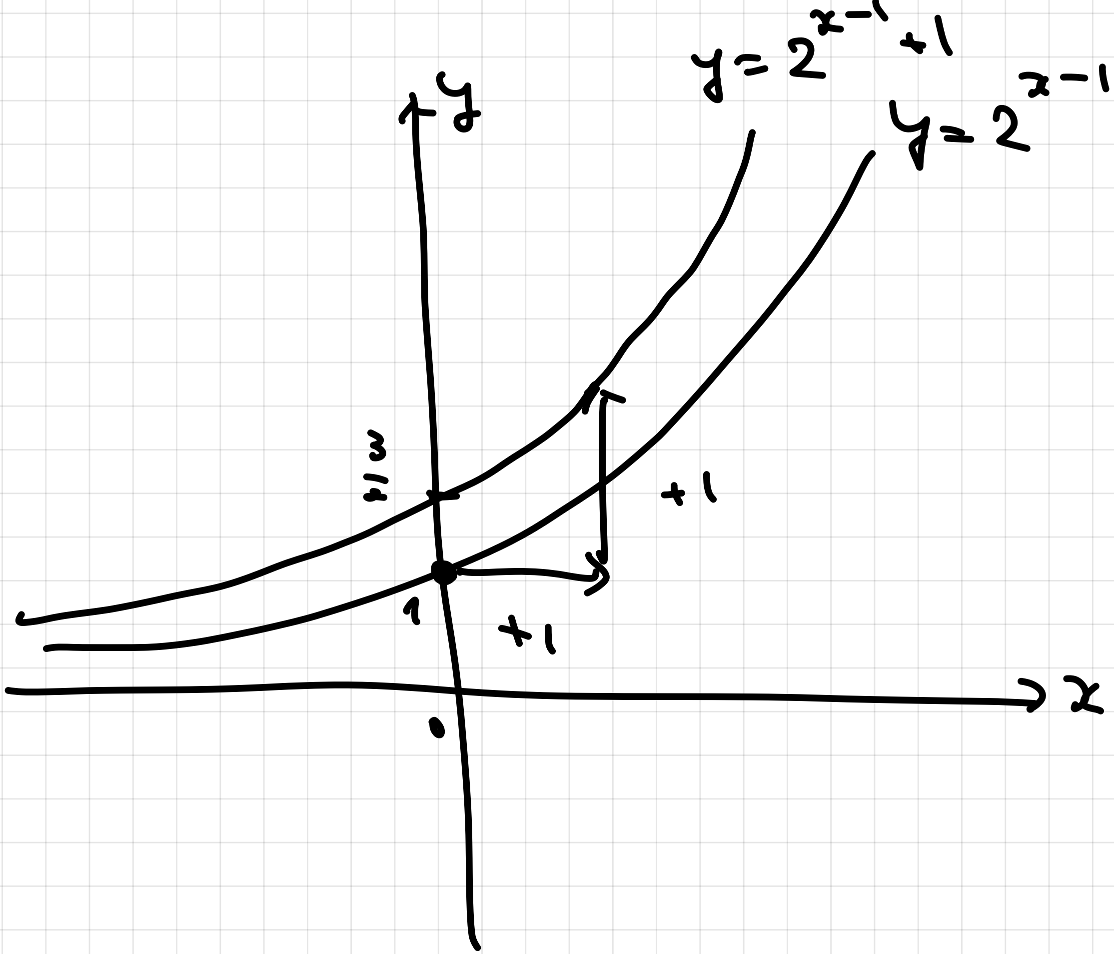
$y = -3^x$ は $y = 3^x$ と

x軸対称の関係



もちろん

$y = 2^{x-1} + 1$ とかもかける



$f(x-\alpha,\ y-\beta) = 0$

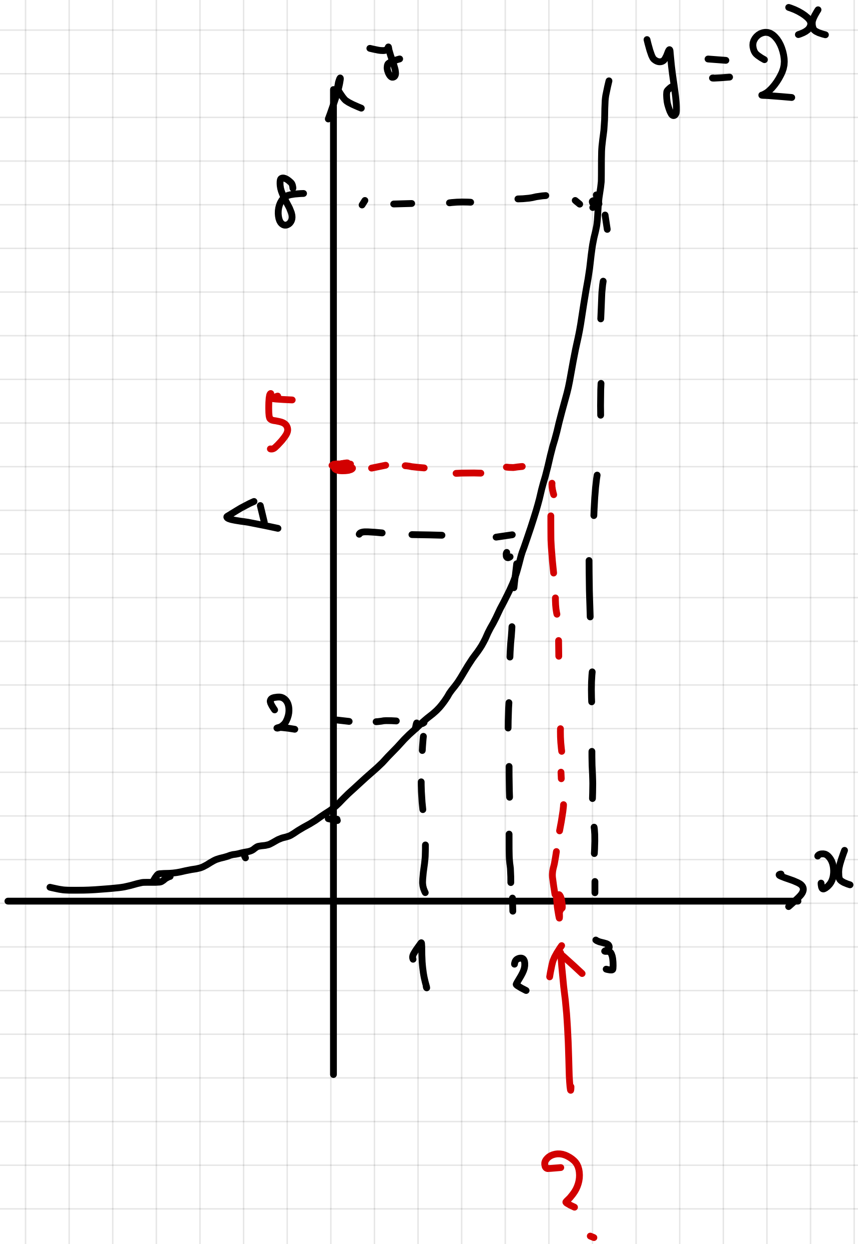
は

$f(x, y) = 0$

を

$\begin{cases} x : +\alpha \\ y : +\beta \end{cases}$ 平行移動

対数関数



$5 = 2^x$ をみたす

xって何？

$\Rightarrow \quad \log_2 5$

2の肩に乗せたら5になる数字

$\log_2 5$ ：対数

底 >0　真数 >0

$3^{\log_3 100} = 100$, $11^{\log_{11} 20} = 20$

計算のルール

$a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $y>0$ のとき.
$b>0$

1. $\log_a x^t = t\log_a x$
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
5. $\log_a a = 1$
6. $\log_a 1 = 0$

暗記するもの

1.

$$a^{\log_a x^t} = x^t$$
$$= \left(a^{\log_a x}\right)^t$$
$$= a^{t\log_a x}$$

$$\Rightarrow \log_a x^t = t\log_a x$$

真数の指数は

前に下りてくる.

2.

$$a^{\log_a xy} = xy$$
$$= \left(a^{\log_a x}\right) \times \left(a^{\log_a y}\right)$$
$$= a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

中身の積は分けて足し算

3.

$$\log_e \frac{x}{y}$$

$$= \log_a \left(x \times y^{-1}\right)$$

$$= \log_a x + \log_a y^{-1}$$

$$= \log_a x - \log_a y$$

中身のかけ算は
分けて引き算

4. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ を示す

$\Rightarrow \log_b a \times \log_a x = \log_b x$ を示せば O.K.

$$b^{\log_b a \times \log_a x}$$

$$= \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x}$$

$$= a^{\log_a x}$$

$$= x \qquad = b^{\log_b x}$$

（底の変換公式）

5.

$$a^{\log_a a} = a$$

$$= a^1$$

$$\Rightarrow \log_a a = 1.$$

6.

$$a^{\log_a 1} = 1$$

$$= a^0$$

$$\Rightarrow \log_a 1 = 0$$

〈演習〉

1. $\log_2 \frac{1}{4}$. 2. $\log_{0.2} 25$

3. $\log_{\sqrt{3}} 27$

4. $\log_3 4 - \log_3 5 + 2\log_3 \sqrt{125}$

5. $4\log_2 12 - \frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{27} + 2\log_4 \sqrt{3}$

1	-2
2	-2
3	6
4	$2\log_3 10$
5	$7 + 6\log_2 3$

1. $\log_2 \frac{1}{4}$

$= \log_2 2^{-2}$

$= -2 \log_2 2$

$= -2$

2 $\log_{0.2} 25$

$= \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$= -2$

3. $\log_{\sqrt{3}} 27$

$= \log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\right)^{6}$

$= 6$

4. $\log_3 4 - \log_3 5 + 2\log_3 \sqrt{125}$

$= \log_3 4 - \log_3 5 + \log_3 125$

$= \log_3 \frac{4 \times \cancel{125}\,25}{\cancel{5}} = \log_3 100$

$= \log_3 10^2 = 2\log_3 10$

5. $4\log_2 12 - \frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{27} + 2\log_4 \sqrt{3}$

$= \log_2 (2^2 \times 3)^4 - \log_2 2 \times 3^{-\frac{3}{2}} + \cancel{2}\,\frac{\log_2 3^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\log_2 4}}$

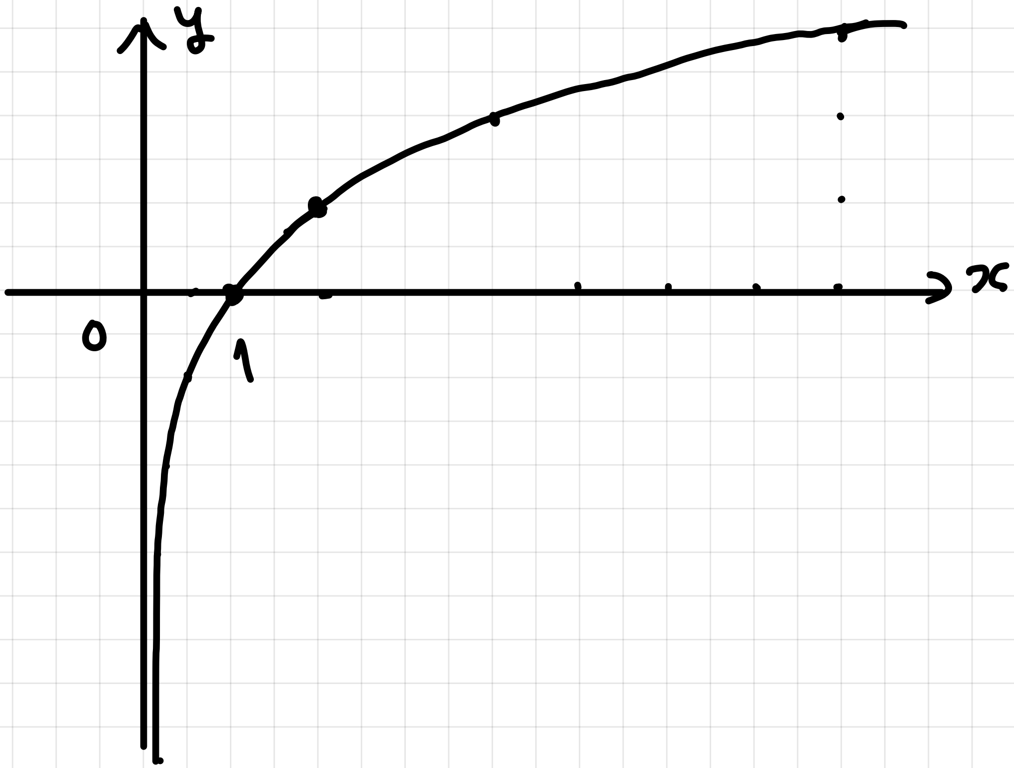
$= \log_2 \frac{2^8 \times 3^4 \times 3^{\frac{1}{2}}}{2 \times 3^{-\frac{3}{2}}}$

$= \log_2 2^7 + \log_2 3^6$

$= 7 + 6\log_2 3$

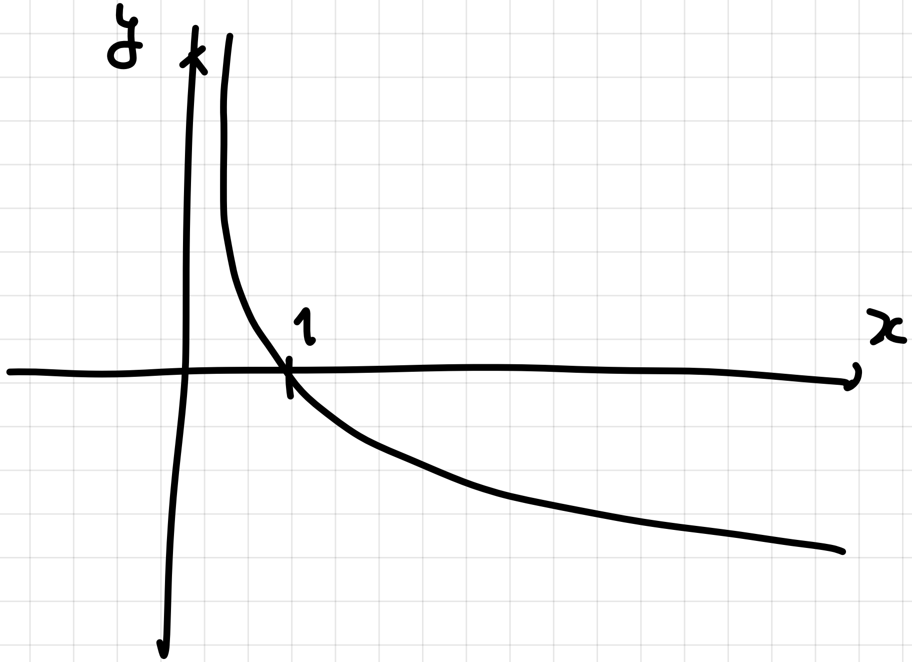
$y = \log_2 x$

x	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$
y	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$



$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

$= \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x$



対数関数の微積分とネイピア数

$y = \log_a x$ を微分する

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

ここで $\frac{h}{x} = \frac{1}{t}$ とおく。

$h \to 0$ のとき $t \to \infty$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{x} \log_a \left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{t \to \infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \Big(\underbrace{\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t}_{\text{ネイピア数 } e} \Big)$$

$$= \frac{1}{x} \log_a e$$

$$= \frac{1}{x} \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{x} \frac{1}{\log_e a}$$

ふつう $\log_e a$ は

$\log a$ や $\ln a$ と書く

底がeの対数を「自然対数」と言う

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log_e a}$$

$a=e$ のとき

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\log x\right) = \frac{1}{x}}$$ 公式

$$\frac{d}{dx}\left(\log f(x)\right) = \frac{d}{df}\left(\log f\right)\cdot\frac{df}{dx}$$

$$= \frac{f'}{f}$$

〈演習〉

断熱変化